היחידה למתמטיקה – המחלקה להנדסת תוכנה

חדו"א 2 להנדסת תוכנה 300101

תשפ"ב סמסטר קיץ

מועד ב'

יום רביעי 26/10/2022, א' בחשון תשפ"ג, 9:00-12:00, **משך הבחינה: 3 שעות**

המרצה האחראית: ד"ר יבגניה אקרמן

המרצה: ד"ר אריה מאיר בראדסקי

חומר עזר: מחשבון רגיל, דף נוסחאות (מצורף לשאלון). סטודנטים בעלי זכאות לדף נוסחאות מורחב יקבלו אותו במבחן.

הוראות לנבחן:

- הבחינה מורכבת מ-8 שאלות. מתוכן **יש לפתור 6 שאלות** בהתאם לפירוט.
- יש לכתוב בכתב יד ברור ומסודר ולפרט כל שלב בחישובים. **תשובות ללא הסבר, אפילו נכונות, לא תתקבלנה.**
- יש לרשום ליד כל תשובה את מספר השאלה, ובמידה ויש גם את מספר הסעיף.

השאלון מכיל 6 עמודים כולל עמוד זה וכולל דפי נוסחאות.

בהצלחה!

שאלות 1 ו-2 הן שאלות חובה!

שאלה 1 (20 נק'):

א. (10 נק') מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ וברורו את סוגן.

ב. (10 נק') מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ בתחום סגור המוגבל על ידי משולש עם הקדקודים $A(0,0),B(0,4),C(4,4)$.

שאלה 2 (22 נק'):

א. (10 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n3^n}$.

האם בנקודה $x=-7$ הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר? נמקו את התשובה.

ב. (12 נק') ציירו את תחום האינטגרציה, החליפו את סדר האינטגרציה, וחשבו:

$$\int_{-2}^{0}dy\int_{-(y+2)}^{y+2}y^2dx$$

פתרו 3 מבין השאלות 3-6

שאלה 3 (16 נק'):

א. (12 נק') מצאו את המרחק בין הישרים:

$$l_1:\begin{cases}2x-y+z=1\\x+y-z-3=0\end{cases}\qquad l_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$$

האם הישרים האלה הם נחתכים, מצטלבים, מקבילים, או מתלכדים?

ב. (4 נק') מצאו את הזווית בין שני הישרים מסעיף א.

שאלה 4 (16 נק'):

נתונה הפונקציה $u(x,y)=x^3y^2$ והנקודה P(2,1).

א. (6 נק') מצאו את הנגזרת הכיוונית של u בנקודה P בכיוון מנקודה זו לכיוון ראשית הצירים.

ב. (6 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח z = u(x,y) בנקודה שבה x=2, y=1.

ג. (4 נק') מצאו את הכיוון שבו הנגזרת הכיוונית בנקודה P מקבלת את ערכה המקסימלי וחשבו את הנגזרת המקסימלית.

שאלה 5 (16 נק'):

נתון הגוף D החסום על ידי המשטחים הבאים:

$$x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=1+y^2$$

א. (6 נק') ציירו את הגוף D.

ב. (10 נק') חשבו את נפח הגוף D.

שאלה 6 (16 נק'):

א. (8 נק') קבעו האם הטור הבא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$$

ב. (8 נק') תנו דוגמות של שני טורים (לאו דווקא חיוביים) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ כך ש $a_n \le b_n$ לכל n,

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

פתרו 1 מבין השאלות 7-8

שאלה 7 (10 נק'):

סרטטו את המשטח:

$$4x^2 - 24x + y^2 - 8y + 2z^2 - 8z + 56 = 0$$

מצאו את הנקודה על המשטח שהיא הקרובה ביותר למישור $y = 12$, וחשבו את המרחק (המינימאלי) ביניהם.

שאלה 8 (10 נק'):

מצאו את הערך הגדול ביותר של הפונקציה $f(x,y,z) = 2x - 5y + 3z$ מעל המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

1. נפח של פירמידה משולשת ABCD : $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{DA}\times\overline{DB}\right)\cdot\overline{DC}\right|$

2. מרחק מהנקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $Ax+By+Cz+D=0$: $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

3. מרחק מהנקודה M לישר העובר דרך הנקודה N במקביל לוקטור $\bar{a}$: $d=\frac{\left|\overline{MN}\times\bar{a}\right|}{|\bar{a}|}$

4. מרחק בין שני ישרים מצטלבים שעוברים דרך נקודות **M** ו- **N** במקביל לוקטורים **a** ו- **b**):

$$d=\frac{\left|\overline{MN}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$$

5. משוואת המישור העובר דרך הנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ במאונך לווקטור נורמל $n(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

6. הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) במקביל לווקטור $a(l, m, n)$:

$$\{x=x_0+l\cdot t,\quad y=y_0+m\cdot t,\quad z=z_0+n\cdot t\}\quad -\infty<t<\infty$$

7. משוואת מישור המשיק למשטח $F(x,y,z)=0$ בנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

8. נגזרת מכוונת של $z(x,y)$ בנקודה M_0 ובכיוון של וקטור $\bar{a}$: $\frac{dz(M_0)}{d\bar{a}}=\frac{grad\ z(M_0)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}$

9. קריטריון $\boxed{\Delta(M)=f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M)-\left(f''_{xy}(M)\right)^2}$ לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של f(x)

10. פונקצית לגרנז' למציאת אקסטרמום של f(x,y) בתנאי φ(x,y)=0: $\boxed{L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)}$

11. מעבר לקואורדינטות קוטביות: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$

12. חישוב המסה m ומרכז המסה (x_c, y_c) של "גוף מישורי" D בעל צפיפות $\rho(x,y)$:

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy;\quad x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy;\quad y_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy$$

13. חישוב של אינטגרל קווי מסוג ראשון:

א) המסלול L מוגדר באופן $y=y(x)$: $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}dx$

ב) מסלול L מוגדר באופן פרמטרי: $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$

14. נוסחת גרין: $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

15. מבחני קושי ודלמבר לבדיקת התכנסות של **טורים חיוביים:**

אם קיים הגבול $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q}$ (דלמבר) או אם קיים הגבול $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q}$ (קושי)

אזי אם $q<1$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ואם $q>1$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

16. **רדיוס ההתכנסות** R של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ או $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

17.טור טיילור עבור הפונקציה $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

18. טורי מקלורן עבור מספר פונקציות בסיסיות:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...\ [-1<x<1];\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...\ [-\infty<x<\infty]$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...;\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...\ [-\infty<x<\infty]$$

19. נגזרות:

1. $(c)'=0,\ c=const;$
2. $(x^n)'=nx^{n-1};$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a;$
4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$
5. $(\sin x)'=\cos x;$
6. $(\cos x)'=-\sin x;$
7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};$
8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$
9. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};$
10. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
11. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
12. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2};$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2};$$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

<u>פונקציה פרמטרית:</u>

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

20. אינטגרלים

1. $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C\qquad(n\neq-1)$
2. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C;$
3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
4. $\int\sin(ax)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+C$
5. $\int\cos(ax)dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+C$
6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$
7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C;$
8. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cdot arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C$
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+p}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right|+C$
11. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$
12. $\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C;$
13. $\int\frac{xdx}{x^2+a}=\frac{\ln|x^2+a|}{2}+C$
14. $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=2\cdot\sqrt{f(x)}+C;$
15. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$
16. $\int tgx\,dx=-\ln|\cos x|+C;$
17. $\int ctgx\,dx=\ln|\sin x|+C$

<u>אינטגרציה לפי חלקים:</u>

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

<u>הצבה טריגונומטרית אוניברסלית:</u>

$$tg\frac{x}{2}=t,\ x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

21. נוסחאות טריגונומטריות:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;\quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;\quad \sin(2x)=2\sin x\cos x;$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x);\quad 2\sin^2(x)=1-\cos(2x);\quad 2\cos^2(x)=1+\cos(2x);$

$(u=0.5(x+y),\ v=0.5(x-y))\rightarrow\sin(x)+\sin(y)=2\sin(u)\cos(v);\ \sin(x)-\sin(y)=2\sin(v)\cos(u);$

$\cos(x)+\cos(y)=2\cos(u)\cos(v);\quad \cos(x)-\cos(y)=-2\sin(u)\sin(v)$

$2\sin x\sin y=\cos(2v)-\cos(2u);\ 2\cos x\cos y=\cos(2u)+\cos(2v);\ 2\sin x\cos y=\sin(2u)+\sin(2v)$

בהצלחה!